Title	回転Couette流におけるWavy-Vortex流の発生(非線型・非平衡状態の統計力学,研究会報告)
Author(s)	八幡, 英雄
Citation	物性研究 (1977), 27(6): F9-F12
Issue Date	1977-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/89324
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

回転Couette 流における Wavy-Vortex 流の発生

広島大・理　八 幡 英 雄

二つの同軸円筒間(内径 R_1, 外径 R_2)に流体を入れ，内側の円筒を角速度 Ω_1 で回転してゆくと，ある Ω_{1c} で Taylor 渦流が生ずるが，$\eta = R_1/R_2$ が 1 に近い円筒の場合にはさらに Ω_1 をましてゆくと，ある Ω'_{1c} で方位角 θ 方向に波うった渦流が生ずる。[1] この問題を考えるために，非圧縮性粘性流体に対する Navier-Stokes 及連続方程式において，方位角方向の一様流からの速度・圧力の攪乱 $\mathbf{u}(u_r, u_\theta, u_z)$，p に対する方程式を，長さを R_2, 時間を R_2^2/ν（ν は運動粘性率）を単位として無次元化しておくと

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} - \left[\partial\partial_* + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_r + \left[\beta\left(1-\frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$
$$= -\left[u_r\,\partial\, u_r + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r}\right], \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} - \left[\beta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_r - \left[\partial\partial_* + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_\theta$$
$$+ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{p}{\rho}\right) = -\left[u_r\,\partial_*\, u_\theta + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} - \left[\partial_*\partial + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\beta}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}\right]u_z + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$
$$= -\left[u_r\,\partial\, u_z + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right], \tag{3}$$

$$\partial_* u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

ここで，$\partial = \dfrac{\partial}{\partial r}$，$\partial_* = \dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r}$；$\beta = \dfrac{2R_1^2\Omega_1}{\nu(1-\eta)^2} = \dfrac{2\eta R}{(1-\eta)^2(1+\eta)}$ は励起パラメタ，$R = \dfrac{\Omega_1 R_1(R_2-R_1)}{\nu}$ は対応する Reynolds 数で，境界条件は $r=1$，η で $\mathbf{u}=0$ となる。

方程式 (1) − (4) の解を左辺の線型部分の基底函数を用いて展開した形で求める：

$$u_r(r,\theta,z,t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\Big[c^c_{omj}(t)\,u_{omj}(r)\,e^{im\theta} + \sum_{\ell=1}^{\infty}\{c^c_{\ell mj}(t)\,u^c_{\ell mj}(r)\,e^{im\theta}\cos\ell az + c^s_{\ell mj}(t)\,u^s_{\ell mj}(r)\,e^{im\theta}\sin\ell az\}\Big], \tag{5}$$

ここで，u_θ, u_z, p/ρ の同様な展開の係数を $v^\alpha_{\ell mj}$，$w^\alpha_{\ell mj}$，$\Pi^\alpha_{\ell mj}$ $(\alpha=c, s)$とすると，$\varphi^\alpha_{\ell mj}=[u^\alpha_{\ell mj}, v^\alpha_{\ell mj}, w^\alpha_{\ell mj}, \Pi^\alpha_{\ell mj}]^T$ は次の固有値方程式の解として求まる。

$$L^\alpha_{\ell m}\,\varphi^\alpha_{\ell mj} = \lambda^\alpha_{\ell mj}\,M\,\varphi^\alpha_{\ell mj}, \tag{6}$$

$$L^\alpha_{\ell m} = \begin{pmatrix} -(\partial\partial_* + \Lambda_{\ell m}) & \beta(1-\frac{1}{r^2}) + i\frac{2m}{r^2} & 0 & \partial \\ -(\beta + i\frac{2m}{r^2}) & -(\partial\partial_* + \Lambda_{\ell m}) & 0 & i\frac{m}{r} \\ 0 & 0 & -(\partial_*\partial + \Lambda_{\ell m}) & -\ell a \\ -\partial_* & -i\frac{m}{r} & -\ell a & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\Lambda_{\ell m} = -\ell^2 a^2 - \frac{m^2}{r^2} + i\frac{m\beta}{2}\left(1-\frac{1}{r^2}\right), \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

この方程式の具体的な解を求めるため，(6) を 6 元 1 階連立微分方程式に変換し，[2] 非線型最適化法を用いて線型不安定を生ずる閾値 β_c，最大線型成長率を与える波数 a_c，方位角方向に m 個の波のたっている波状渦流の生ずる閾値 β_{cm}，そのときの振動数 ω_{cm}

を求めた。

方程式(1)－(4)に(5)の展開を代入し，さらに(6)の共軛方程式の解を用いると，次の形のモード結合方程式を得る。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\lambda_{\ell mj}\right)c^{\alpha}_{\ell mj}(t)=-\sum_{\substack{\beta\ell'm'j'\\ \gamma\ell''m''j''}}N^{\alpha\beta\gamma}_{\ell mj;\ell'm'j',\ell''m''j''}\,c^{\beta}_{\ell'm'j'}(t)\,c^{\gamma}_{\ell''m''j''}(t). \tag{9}$$

波状渦流の状態はDavey-DiPrima-Stuart [3] により，$c^{c}_{101}(t)=X(t)$ と $c^{s}_{111}(t)=\hat{V}(t)=V(t)e^{-i\omega t}$ の重畳からなることがしらべられているので，これら閾値付近でゆっくり変化する流れの振幅に対する次の形の方程式をみちびいた。

$$\partial_t X = g_1 X - g_{11} X^3 - g_{14} X\,|V|^2 - P_{101} X^5 - Q_{101} X^3 |V|^2 - R_{101} X |V|^4, \tag{10}$$

$$\partial_t \hat{V} = g_4 \hat{V} - g_{41} X^2 \hat{V} - g_{44} |V|^2 \hat{V} - P_{111} X^4 \hat{V} - Q_{111} X^2 |V|^2 \hat{V} - R_{111} |V|^4 \hat{V}. \tag{11}$$

ここで結合係数を計算するため，中間状態として必要な higher-lying states は $\ell=0,2$ に対して $m=0, 1, 2$； $\ell=1, 3$ に対して $m=0, 1, 2, 3$ であり，さらに実際の計算には $j=1\sim8$ をとった。(10)，(11) で $\partial_t=0$ として実数部分をとると，定常振幅をきめる方程式をうる。波状渦流の発生する β の値は，

$$\partial_t\,\delta|V|^2 = 2[g'_4 - g'_{41}X^2 - P'_{111}X^4]\,\delta|V|^2 \tag{12}$$

の係数から定めることができる。実験としては β を増していったときの外円筒における平均偶力Gの測定[4]があるが，これは，

$$G = -2\pi\rho\nu^2 h\sum_{j=1}^{\infty} c^{c}_{00j}(t\to\infty)\,\partial v_{00j}(1)$$

$$= 2\pi\rho\nu^2 h\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\partial v_{00j}(1)}{\lambda_{00j}}\left[N^{ccc}_{00j;101,101}X^2 + N^{css}_{00j;111,11^*1}|V|^2\right.$$

$$+ P_{00j} X^4 + Q_{00j} X^2 |V|^2 + R_{00j} |V|^4], \tag{13}$$

から計算される。実験によるとGはβ_c以上でTaylor 渦流の発生によりβに対する増加率がふえるが，β_{c1}付近で増加率が再び減少することが知られている。筆者の行った計算結果によるとこの原因は波状渦流$|V|^2$によるものではなく，X^4の効果によるものであるように思われる（$|V|^2$の振幅はX^2に比して非常に小さい）。

参考文献

1) K. W. Schwarz, B. E. Springett, R. J. Donnelly, JFM **20** (1964), 281.
   D. Coles, JFM **21** (1965), 385.
2) 例えば，P. H. Roberts, Proc. Roy. Soc. **A283** (1965), 550.
   E. R. Krueger, A. Gross, R. C. DiPrima, JFM **24** (1966), 521.
3) A. Davey, R. C. DiPrima, J. T. Stuart, JFM **31** (1968), 17.
   P. M. Eagles, JFM **49** (1971), 529.
   C. Nakaya, JPSJ **38** (1975), 576.
4) R. J. Donnelly and N. J. Simon, JFM **7** (1960), 401.

多成分反応拡散系における位相波

京大理　蔵　本　由　紀

反応拡散方程式

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{R}(\mathbf{X}) + D\nabla^2\mathbf{X} \tag{1}$$

（ここに$\mathbf{X}$は濃度ベクトル$\mathbf{X}=(X_1, X_2, \cdots X_S)$，Dは対角行列）の縮約法として，ひとつは reductive perturbation 法があるが，ここでは全く別の方法を論じ，導出された方程式に基いて、濃度パターンとの関係及び化学乱流発生の条件等を考察する。

この方法は$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{R}$が安定なリミットサイクル振動の解をもつ場合に適用できる。まず